DIARIO DELLE LEZIONI
DI
ANALISI MATEMATICA II
Corso di laurea in Ingegneria Clinica
Canale PZ
A.A. 2017/2018
Codocente: Dott. Salvatore Fragapane

Lezione 1 - 09/03/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Esercizi svolti:

Es.1 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n^2}},\ x \geq 0.$$

(R: converge puntualmente e uniformemente a $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, +\infty[$)

Es.2 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3}\cos[-n(x^2 + 2\pi)],\ x \in I = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\right].$$

(R: converge puntualmente e uniformemente a $f(x) = 0$ in I)

Es.3 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = \frac{\arctan[n(x^2 + 1)]}{x^2 n^2 + 1} + x$$

e calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^3 f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

(R: (1) converge puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x) = x, x \neq 0, f(x) = \frac{\pi}{2}, x = 0$, e uniformemente in $A =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[,\ a > 0$; (2) 4)

Es.4 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^4}{1 + n^2 x^4},\ x \geq 0.$$

(R: converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)=1, x>0, f(x)=0, x=0$, e uniformemente in $A=[a,+\infty[,\ a>0)$

Es.5 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = xe^{-n^2x^3}$$

e dedurre il valore di

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\log 2}^{\log 37} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(R: (1) converge puntualmente e uniformemente in $[0,+\infty[,\ a>0$ a $f(x)=0$; (2) 0)

- Esercizi assegnati:

i) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = x^n\log(x+n),\ x\geq 0.$$

(R: converge puntualmente in $[0,1[$ a $f(x)=0$ e uniformemente in $A=[0,a],\ a>0)$

ii) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di

$$f_n(x) = \left(\frac{n^2+x}{n^2}\right)^n,\ x\geq 0$$

e calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(R: converge puntualmente in $[0,+\infty[$ a $f(x)=1$ e uniformemente in $A=[0,a],\ a>0)$

Lezione 2 - 16/03/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Richiami teorici: serie telescopiche.
- Esercizi svolti:

Es.6 Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x\in[0,1-\frac{1}{n}) \\ 0, & \text{se } x\in[1-\frac{1}{n},1] \end{cases}.$$

(R: converge puntualmente e uniformemente in $[0,1]$ a $f(x) = 1 - x$)

Es.1 Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\frac{x^2}{x+n} - \frac{x^2}{x+n+1}\Big], \; x \geq 0.$$

(R: converge puntualmente in $[0, +\infty[$ a $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ e uniformemente in $A = [0, a], \; a > 0$)

Es.2 Studiare la convergenza puntuale e totale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\sqrt{n}}, \; x \geq 0.$$

(R: converge puntualmente in $[0,1[$ e totalmente in $A = [0, a], \; a > 0$)
Es.3 Calcolare

$$\int_0^{\log 2} \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) e^x \Big(\frac{1}{e^x + 1}\Big)^{n-1} \, \mathrm{d}x.$$

(R: $\frac{1}{2}$)

- <u>Esercizi assegnati:</u>

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{4n}{n+1}(x-1), & \text{se } x \in [0, 1 - \frac{1}{4n}] \\ \frac{1}{n+1}, & \text{se } x \in (1 - \frac{1}{4n}, 1 - \frac{1}{n}) \\ \frac{n}{n^2-1} x, & \text{se } x \in [1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \quad , \; n \geq 2.$$

(R: converge puntualmente e uniformemente in $[0,1]$ a $f(x) = 4(1-x)$)

ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\frac{(\arctan x)^n}{n} - \frac{(\arctan x)^{n+1}}{n+1}\Big].$$

(R: converge puntualmente e uniformemente in $[-\tan 1, \tan 1]$ a $f(x) = \arctan x$)

iii) Studiare la convergenza puntuale e totale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n} x^n.$$

(R: converge puntualmente in $]-1,1[$ e totalmente in $A=[-a,a],\ a>0$)

iv) Calcolare

$$\int_1^{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{x^2+1}\Big(\frac{1}{\arctan x+\pi}\Big)^n \,\mathrm{d}x.$$

(R: $\frac{\pi}{(5\pi-4)(4\pi-3)}$)

v) Studiare la convergenza puntuale e totale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{x}{n}\Big)^2 e^{nx},\ \ x\in\mathbb{R}.$$

(R: converge puntualmente e totalmente in $A=]-\infty,0]$)

vi) Studiare la convergenza puntuale e totale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \log(x^2+n),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

(R: converge puntualmente in $]-1,1[$ e totalmente in $A=[-a,a],\ a>0$)

Lezione 3 - 23/03/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Richiami teorici: formula di Stirling.
- Esercizi svolti:

Es.1 Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!2^n}(x-7)^n.$$

(R: (1) $R=+\infty$; (2) $I=\mathbb{R}$)

Es.2 Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\log(n+1)}(x+2)^n.$$

(R: (1) $R = 0$; (2) $x = -2$)

Es.3 Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!e^n}{n^n}(x-1)^n.$$

(R: (1) $R = 1$; (2) $I = (0, 2)$)

Es.4 Calcolare la somma della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log 2)^n}{n!}.$$

(R: 1)

Es.5 Calcolare la somma della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\pi^n x^{2n-1}}{(2n)!}, x \neq 0.$$

(R: $\frac{\cos(\sqrt{\pi}x)}{x}, x \neq 0$)

Es.6 Sviluppare in serie di Maclaurin la seguente funzione

$$f(x) = \frac{5}{(1+x)(3-2x)}$$

e dire dove converge.
(R: (1)$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n + (\frac{2}{3})^n\right] x^n$; (2) I= $(-\frac{3}{2}\ ,\frac{3}{2})$)

Es.7 Sviluppare in serie (di funzioni) la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{1+x}-1}$$

e dire dove converge. Tale sviluppo, coincide con lo sviluppo in serie di potenze?
(R: (1)$-\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$; (2) $I=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; (3) No)

- Esercizi assegnati:

i) Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^n+1}\Big(\frac{x-3}{2}\Big)^n.$$

(R: (1) $R=\frac{3}{2}$; (2) $I=(0,6)$)

ii) Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x+4)^n.$$

(R: (1) $R=1$; (2) $I=[-5,-3)$)

iii) Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^5+1}(2x-1)^n.$$

(R: (1) $R=1$; (2) $I=[0,1]$)

iv) Determinare raggio e intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}x^n.$$

(R: (1) $R=e$; (2) $I=(-e,e)$)

v) Calcolare la somma della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n n}.$$

(R: $\log(\frac{3}{2})$)

vi) Calcolare la somma della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n-1}x^{n+1}}{n!}.$$

(R: xe^{ex-1})

vii) Sviluppare in serie di Taylor, di punto iniziale $x_0 = 1$, la seguente funzione

$$f(x) = \frac{2}{(2-x)(4-3x)}$$

e dire dove converge.
(R: (1)$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1+3^{n+1})(x-1)^n$;(2) I=$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$)

viii) Sviluppare in serie (di funzioni) la seguente funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1-x^2}{1+2x^2}\right)$$

e dire dove converge. Tale sviluppo, coincide con lo sviluppo in serie di potenze?
(R: (1)$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3x^2}{1+2x^2}\right)^n$; (2) $I = (-1, 1)$; (3) No)

Lezione 4 - 06/04/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**
- <u>Esercizi svolti</u>:
Es.1 Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica

$$f(x) = x^2, x \in]-\pi, \pi]$$

e dedurre il valore di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(R: (1) $\frac{\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$; (2) $\frac{\pi^2}{6}$)

Es.2 Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \sin^2 x.$$

(R: (1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$, con $a_0=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_k=0,\ k\neq 0\wedge k\neq 2$ e $b_k=0,\ k\geq 1$)

Es.2 Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{se } -\pi<x\leq-\frac{\pi}{2}\\ 1,\ \text{se } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0,\ \text{se } -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\end{cases}$$

e dedurre il valore di

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(R: (1) $\frac{1}{2}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1}\cos[(2k+1)x]=f(x)$, se $x\neq\frac{\pi}{2}+z\pi$,$=\frac{1}{2}$, se $x=\frac{\pi}{2}+z\pi$,$z\in\mathbb{Z}$; (2) $\frac{\pi}{4}$)

Es.3 Sviluppare in serie di Fourier la funzione π-periodica

$$f(x)=|\sin x|$$

e dedurre il valore di

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}.$$

(R: (1) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx)$; (2) $\frac{1}{2}$)

- Esercizi assegnati:
i) Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica

$$f(x)=e^x, x\in]-\pi,\pi].$$

(R: (1) $\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}[\cos(kx)-k\sin(kx)]=f(x)$, se $x\neq z\pi$,$=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$, se $x=z\pi$,$z\in\mathbb{Z}$)

ii) Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x)=\cos^3 x.$$

(R: (1) $\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{4}\cos(3x)$, con$a_0=0$, $a_1=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{1}{4}$, $a_k=0$, $k\neq 1\wedge k\neq 3$ e $b_k=0,\ k\geq 1$)

iii) Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \sin x \cos^2 x.$$

(R: (1) $\frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$, con $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_k = 0,\ k \neq 1 \wedge k \neq 3$ e $a_k = 0,\ k \geq 0$)

iv) Sviluppare in serie di Fourier la funzione 4-periodica

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -2 < x \leq -1 \\ 1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

(R: (1) $\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos[\frac{(2k+1)\pi x}{2}] = f(x)$, se $x \neq 1 + 2z$,$= \frac{1}{2}$, se $x = 1 + 2z$,$z \in \mathbb{Z}$)

v) Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica

$$f(x) = \cos x - x, x \in]-\pi, \pi].$$

(R: (1) $\cos x - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{k} \sin(kx) = f(x)$, se $x \neq \pi + z\pi$,$= -1$, se $x = \pi + z\pi$,$z \in \mathbb{Z}$)

Lezione 5 - 13/04/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Richiami di Algebra e Geometria: definizione di matrice definite positiva e negativa, semidefinita positiva e negativa, indefinita; criteri per riconoscere tali tipi ti matrici; esempi.
- Funzioni in due variabili (1): definizione di grafico di una funzione; grafici di piano (Es.2), semisfera (Es.3), paraboloide (Es.4), cono a una falda (Es.5) e semi-ellissoide (Es.6). - Esercizi svolti:

Es.1 Dire se le seguenti matrici sono definite o semidefinite positive/negative o indefinite

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(R: (1)A indefinita; (2)B semidefinita positiva; (3) C definita positiva)

Es.2 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni, specificando se si tratta di un insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato.

$$\text{(a) } f(x,y) = e^{\frac{\log(x^2+y^2+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+1} + (x^2+y^2-1)^\pi, \text{ (b) } f(x,y) = \sqrt{\frac{\pi}{2} - |x| - |\arctan y|}.$$

Es.3 Calcolare, se esistono, i valori dei seguenti limiti

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, \text{ (b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}.$$

(R: (a) non esiste; (b) non esiste)

Es.4 Dire se la seguente funzione è continua in $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^{\frac{7}{3}}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(R: sì)

- Esercizi assegnati:
i) Dire se le seguenti matrici sono definite o semidefinite positive/negative o indefinite

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(R: (1)A indefinita; (2)B semidefinita negativa; (3) C definita negativa)

ii) Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni, specificando se si tratta di un insieme aperto o chiuso, limitato o illimitato.

$$\text{(a) } f(x,y) = \log\left(\frac{x^2-y}{x^2-y^2}\right) + (x^2+y^2-1)^\pi, \text{ (b) } f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right).$$

iii) Calcolare, se esistono, i valori dei seguenti limiti

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^6+y^6}}, \text{ (b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{3x^4+|y|}.$$

(R: (a) non esiste; (b) non esiste)

iv) Dire se la seguente funzione è continua in $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^8}{x^6+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(R: sì)

Lezione 6 - 20/04/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Premessa agli integrali doppi (1): definizione di insieme convesso; definizioni di dominio normale rispetto all'asse x e rispetto all'asse y; esempi.
- Esercizi svolti:

Es.1 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Inoltre, calcolare $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)$ lungo la direzione $\hat{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
(R: (1) continua e derivabile in $\mathbb{R}^2$, differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$; (2) $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = \frac{\sqrt{3}}{8}$)

Es.2 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Inoltre, calcolare $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0)$ lungo la direzione $v = (1,1)$ e determinare l'equazione del piango tangente ad $f(x,y)$ nel punto $P(1,0)$.
(R: (1) differenziabile in $\mathbb{R}^2$; (2) $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(0,0) = 0$; (3) $z = 2x - 1$)

Es.3 Rappresentare graficamente i seguenti insiemi, specificando se si tratta di domini normali rispetto ad uno degli assi cartesiani e se sono insiemi convessi.

$$\text{(a) } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 6\},$$

$$\text{(b) } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4, 0 \le x \le y\},$$

$$\text{(c) } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 2, 0 \le y \le |x| + 1\},$$

$$\text{(d) } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x \le \sqrt{y}\}.$$

(R: A, B e D convessi e normali rispetto ai entrambi gli assi; C normale rispetto ad x e non convesso)

- Esercizi assegnati:
i) Rappresentare graficamente il seguente insieme, specificando se si tratta di un dominio normale rispetto ad uno degli assi cartesiani e se è convesso.

$$\text{(e) } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\}$$

(R: E normale rispetto ad x e non convesso).

Lezione 7 - 27/04/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**
- Premessa agli integrali doppi (2): cambi di variabili in domini normali e non; esempi.
- Esercizi svolti:
Es.1 Determinare un cambio di variabile in modo da rappresentare i seguenti domini come domini normali e rappresentarli graficamente.

$$\text{(a) } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\},$$

$$\text{(b) } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \le 0, y \ge \frac{1}{2}\},$$

$$\text{(c) } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 2x, 1 \le xy \le 2\}.$$

(R: (a) $A_1 = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta < 2\pi\}$; (b) $B_1 = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2\sin\theta} \le \theta \le 1\}$;(c) $C_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}$)

Es.2 Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine delle seguenti funzioni centrato nel punto indicato a fianco

$$\text{(a) } f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2) \quad P_0(0, 0),$$

$$\text{(b) } f(x, y) = \log(x + y) \quad P_0(1, 0).$$

(R: (a) $f(x,y) = x^2+y^2+o(x^2+y^2)$; (b) $f(x,y) = -\frac{3}{2}+2x+2y-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+o(x^2+y^2)$)

Es.3 Determinare e classificare i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = x^2y + x^3y + x^2y^2.$$

(R: $P_1(-1,0)$ di sella, $P_2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ di minimo relativo, $P_y(0,y)$ si minimo relativo, se $y < -1 \vee y > 0$, di massimo relativo, se $-1 < y < 0$, di sella, se$y = -1 \vee y = 0$)

- Esercizi assegnati:
i) Determinare il gradiente e i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = x\cos(y-x) - y\sin(x-y).$$

(R: (a) $(x,y) = (\cos(y-x) + x\sin(y-x) + y\cos(x-y), -x\sin(y-x) + \sin(x-y) - y\cos(x-y))$; (b) $P_k(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}),\ k \in \mathbb{Z}$)

Lezione 8 - 03/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**
- Funzioni in due variabili (2): definizione di insieme connesso e connesso per archi; teorema del gradiente nullo (con dim.) + controesempio (Es.1).
- Curve in $\mathbb{R}^3$: definizione di curva in R^3; definizioni di curva di classe C^1, regolare, semplice, chiusa, piana e regolare a tratti; lunghezza di una curva; esempi. - Esercizi svolti:
Es.1 La funzione

$$f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + \arctan(\frac{y}{x})$$

ha gradiente nullo nel suo insieme di definizione, ma non è ivi costante.

Es.2 Analizzare le seguenti curve

$$\text{(a) } \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{(b) } \gamma_2(t) = (2t, t, 5t^2),\ t \in [0, 1]$$

Calcolare la lunghezza di $\gamma_1(t)$.
(R: (a) $\gamma_1(t)$ regolare, semplice e non chiusa; (b) $\gamma_1(t)$ regolare, semplice, non chiusa e piana; $L(\gamma_1(t)) = 2\sqrt{2}\pi$)

Es.3 Calcolare

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s,$$

con

$$\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t),\ \ t \in [0, 2\pi],\ \text{spirale di archimede.}$$

(R: $\frac{\sqrt{(1+4\pi^2)^3}-1}{3}$)

Es.4 (esempio di curva non rettificabile)

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x},\ \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0,\ \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Lezione 9 - 04/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Funzioni in due variabili (3): Teorema di Weierstrass; metodo diretto per la ricerca dei massimi e minimi assoluti; esempi.
- Premessa agli integrali tripli: coordinate sferiche e coordinate cilindriche.
- Esercizi svolti:

Es.1 Determinare massimo e minimo assoluti, specificando i punti dove sono assunti, della funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + y^3 - 1$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(R: $\max_A f(x, y) = 11 = f(\pm 2, 0)$ e $\min_A f(x, y) = -9 = f(0, -2)$)

Es.2 Determinare massimo e minimo assoluti, specificando i punti dove sono assunti, della funzione

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - 2x^2$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq 1 - x^2\}.$$

(R: $\max_A f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ e $\min_A f(x, y) = -3 = f(-1, 0)$)

Lezione 10 - 11/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Integrali doppi: Baricentro di un dominio piano.
- Esercizi svolti:

Es.1 Determinare massimo e minimo assoluti, specificando i punti dove sono assunti, della funzione
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$
vincolati all'insieme
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}.$$
(R: $\max_A f(x,y) = \sqrt{2} - 1 = f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ e $\min_A f(x,y) = 0 = f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1)$)

Es.2 Determinare i punti della curva $x^2 - y^3$ che hanno minima distanza dal punto $P(0,-1)$.
(R: $P_0(0,0)$)

Es.3 Calcolare
$$\int_\Omega xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
con
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$
(R: 0)

Es.4 Calcolare
$$\int_\Omega (y^2 + x + 1) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
con
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq |x| + 1\}.$$
(R: $\frac{11}{2}$)

Es.5 Calcolare
$$\int_\Omega |y - x^2| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
con
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$
(R: $\frac{7}{60}$)

Es.6 Calcolare il baricentro dell'insieme
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

(R: G($\frac{4}{3\pi}$,0))

Esercizi assegnati:
i) Determinare massimo e minimo assoluti, specificando i punti dove sono assunti, della funzione

$$f(x,y) = 3x + y^2$$

vincolati all'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

(R: $\max_A f(x,y) = 3 = f(1,0)$ e $\min_A f(x,y) = 0 = f(0,0)$)

ii) Calcolare il baricentro dell'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}.$$

(R: $G(\frac{2}{\pi}, 0)$)

iii) Calcolare la misura dell'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2,\ x \leq y \leq 2x\}.$$

(R: $\log \sqrt{2}$)

Lezione 11 - 17/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**
- Volumi dei solidi di rotazione (1): caso di $y = f(z)$ che ruota attorno all'asse z (con dim.); teorema di Pappo-Guldino (con dim.); esempi.
- Esercizi svolti:
Es.1 Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(R: $\sqrt{\pi}$)

Es.2 Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa dell'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

attorno all'asse x.
(R: $\frac{8\pi}{3}$)

Es.3 Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 8 - x^2\}$$

attorno all'asse y.
(R: $\frac{15\pi}{2}$)

- Esercizi assegnati:
i) Calcolare il volume del solido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 1\}.$$

(R: $\frac{5\pi}{3}$)

Lezione 12 - 18/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**
- Volumi dei solidi di rotazione (2): caso di $z = f(y)$ che ruota attorno all'asse z (con dim.); esempi.
- Esercizi svolti:
Es.1 Calcolare il volume del solido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq 0, z \leq x^2 + y^2\}.$$

(R: $\frac{7\pi}{6}$)

Es.2 Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq |1 - x^2|\}$$

attorno all'asse x.
(R: $\frac{92\pi}{15}$)

Es.3 Calcolare

$$\iiint_T (x - |z| + y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

con

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, z \geq x^2 + y^2 - 1\} \text{ (da completare).}$$

(R: $-\frac{11\pi}{48}$)

- Esercizi assegnati:

i) Calcolare
$$\iiint_\Omega z^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
con
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}.$$
(R: $\frac{(4-\sqrt{2})\pi}{15}$)

ii) Determinare il baricentro di
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 1\}.$$
(R: $G(0,0,\frac{27}{20})$)

iii) Calcolare
$$\iiint_T [(x^2+y^2)z] \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
con
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq 1, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2+\sqrt{x^2+y^2}\}.$$
(R: $\frac{113\pi}{60}$)

iv) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa dell'insieme
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3-x\}$$
attorno all'asse y.
(R: $\frac{20\pi}{3}$)

Lezione 13 - 25/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Area delle superfici di rotazione (1): secondo teorema di Pappo-Guldino (con dim.); esempi.

- Esercizi svolti:

Es.1 Determinare l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse

y della curva $y(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(R: 2π)

Es.2 Calcolare

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\mathrm{d}S$$

con

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(R: $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$)

Es.3 Sia direttamente che utilizzando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x, y, z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, z = x^2 + y^2\},$$

con normale orientata in modo che $n^+ \cdot e_3 < 0$.
(R: 40π)

- Esercizi assegnati:
i) Calcolare l'area della seguente superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq \frac{3}{2}\}$$

(R: 9π)

ii) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (-z, y^2, x)$ uscente dalla frontiera di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 5 - z\}$$

e dalla superficie $\Sigma = \partial\omega \setminus \Sigma_1$, con

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1, y = 0\}.$$

(R: $\frac{101\pi}{4}$)

iii) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F = (-y^3, x^3, xz - z^2)$ entrante alla superficie $\partial\Omega$, con

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

e da $\Sigma = \partial\Omega \setminus \Sigma_1$, con

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 4, z = 2\},$$

orientata in modo che $n^+ \cdot e_3 > 0$. (R: (1) 0; (2)-12π)

Lezione 14 - 29/05/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **7**
- Relezioni tra integrali doppi e curvilinei (1): formule di Gauss-Green; area di domini regolari; formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$; teorema della divergenza in R^2; esempi.
- Esercizi svolti:

Es.1 Calcolare l'area della regione di piana D avente come bordo la curva (CARDIOIDE)

$$\gamma(t) = ((1-\cos t)\cos t, (1-\cos t)\sin t),\ \ t \in [0,2\pi].$$

(R: $\frac{3\pi}{2}$)

Es.2 Calcolare l'area della regione di piana D avente come bordo la curva (ASTEROIDE)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

(R: $\frac{3\pi}{8}$)

Es.3 Calcolare $\int_\gamma \omega$, con

$$\omega = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}y$$

e

$$\text{(a) } \gamma(t) = (\arctan^{31}(t+1)\sin t, e^{\sin^{51} t}\cos t),\ \ t \in [0,2\pi];$$

$$\text{(b) } \gamma \text{ curva con sostegno } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 2\}$$

percorsa in senso antiorario.

(R: (a) 0; (b) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$)

Es.4 Calcolare $\int_\gamma \omega$, con

$$\omega = \Big(\frac{2x}{x^2+y^2+1} + e^{x-y} + y\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(\frac{2y}{x^2+y^2+1} + e^{x-y} + 1\Big)\mathrm{d}y$$

e

$$\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t),\ t \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

(R: $-\log 3 - 1 - \frac{\pi}{4}$)

Lezione 15 - 01/06/2018, dalle **16.00** alle **18.00** in aula **6**

- Esercizi svolti:

Es.1 Calcolare $\int_\gamma \omega$, con

$$\omega = (7x^6 + 4y^2)\, \mathrm{d}x + (6x^7 + 5x^2)\mathrm{d}y$$

e γ^+ curva percorsa in senso antiorario con sostegno

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}.$$

(R: 0)

Es.2 Calcolare $\int_\gamma \omega$, con

$$\omega = (2xe^{z^2} + 1)\, \mathrm{d}x + \Big(\frac{1}{y^2+1} - 1\Big)\mathrm{d}y + \Big(\frac{2x}{x^2+1}\Big)\mathrm{d}z$$

e γ il segmento di estremi $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$.
(R: $e - \frac{\pi}{4} + \log 2 - 1$)

Es.3 Sia direttamente che con le formule di Gauss-Green che usando i risultati sulle forme differenziali, calcolare $\int_\gamma \omega$, con

$$\omega = [2x\cos(x^2+y^2) + 1]\, \mathrm{d}x + [2y\cos(x^2+y^2) + x]\mathrm{d}y$$

e $\gamma = \partial\Omega$ percorsa in senso antiorario, essendo

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$$

(R: 2π)

Es.4 Calcolare la circuitazione del campo vettoriale $F = (3y^2, -4x, z^3)$ sul bordo di

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 9\},$$

orientata in modo che $n^+ \cdot e_3$. Che succede se il cono è chiuso?
(R: (1) 36π; (2) 0)

- Esercizi assegnati:
i) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F = (x^2, y^2, -3z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

orientata in modo che $n^+ \cdot e_3 < 0$, direttamente e col teorema della divergenza. Inoltre, calcolare la circuitazione di $\bar{F} = (2y, x^2, -3z)$ lungo il bordo di Σ^+.
(R: (1) 13π; (2) 6π)