CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA - a.a. 2003/2004
Svolgimento esercizi della prova scritta di CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE 3 (29 marzo 2004)
COMPITO A

1) La superficie è il grafico di una funzione, definita in tutto il semipiano destro delle x positive, di classe C^1. Inoltre $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$; $\dfrac{dz}{dy} = -1$. Pertanto

$$W(x,y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \;=\; \sqrt{2 + \frac{9}{4}x} \ .$$

Il dominio di integrazione può essere rappresentato in forma normale rispetto all'asse delle y:

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le y \le 1 \ ; \ y \le x \le 2\} \ ,$$

da cui segue

$$Area(S) = \int_0^1 \ dy \int_y^2 \ \sqrt{2 + \frac{9}{4}x} \ dx \ = \ \int_0^1 \left[\frac{8}{27}\left(2 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_y^2 \ dx \ =$$

$$= \frac{8}{27} \int_0^1 \left[\left(\frac{13}{2}\right)^{3/2} - \left(2 + \frac{9}{4}y\right)^{3/2}\right] \ dy \ = \ \frac{8}{27} \ \left[\left(\frac{13}{2}\right)^{3/2} y - \frac{8}{45}\left(2 + \frac{9}{4}y\right)^{5/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{27} \ \left\{\left(\frac{13}{2}\right)^{3/2} + \frac{8}{45}\left[2^{5/2} - \left(\frac{17}{4}\right)^{5/2}\right]\right\} \ .$$

2) Il dominio T è normale rispetto al piano (x,y) e si può scrivere nella forma

$$T = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid 0 \le x \le 1 \ ; \ x-1 \le y \le 0 \ ; \ x-y-1 \le z \le 0\} \ .$$

Trattandosi di un tetraedro, il suo volume è immediatamente fornito da un terzo dell'area di base per la lunghezza dell'altezza:

$$VolT = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \ .$$

Inoltre

$$\iiint_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2} \ dx \ dy \ dz \ = \ \int_0^1 \ dx \ \int_{x-1}^0 \ dy \ \left[\frac{-1}{(2-x+y+z)}\right]_{x-y-1}^0 \ =$$

$$= \int_0^1 \ dx \ \int_{x-1}^0 \ dy \left[1 - \frac{1}{2-x+y}\right] \ = \ -\int_0^1 \ [x - 1 + \log(2-x)] \ dx \ .$$

Ricordando che, integrando per parti, si ha

$$\int \log(-t)\ dt = t\log(-t) - t + C\ ,$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\iiint_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2}\ dx\ dy\ dz\ &=\ \left[\frac{(x-1)^2}{2} + (x-2)\log(2-x) - (x-2)\right]_1^0\ = \\ &=\ \frac{3}{2} - 2\log 2\ .\end{aligned}$$

3) Detta $F(x,y) = e^{xy} - (1+x)y$, i punti singolari della curva $F(x,y) = 0$ sono caratterizzati dalla condizione $\nabla F = (F_x, F_y) = (0,0)$.

In questo caso si ha

$$F_x(x,y) = ye^{xy} - y = y\,(e^{xy} - 1) \quad ; \quad F_y(x,y) = xe^{xy} - (1+x)\ .$$

La prima derivata si annulla per $y = 0$, oppure per $e^{xy} = 1$, cioè per $x = 0$, oppure, nuovamente, per $y = 0$. In entrambi i casi si ha $F_y = 0 \Longleftrightarrow -1 = 0$. Quindi non esistono punti singolari per la curva.

Consideriamo il punto $P_0 = (0,1)\ :\ F(0,1) = 0\ ;\ F_x(0,1) = 0\ ;\ F_y(0,1) = -1 \neq 0$. Dunque, secondo il Teorema di Dini, esiste un intorno del punto $P_0 = (0,1)$ in cui la curva è esplicitabile rispetto alla variabile x, cioè è localmente grafico di una funzione regolare $y = f(x)$. Per tale funzione, sempre in base al Teorema di Dini, si ha

$$f'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = 0\ .$$

In $x_0 = 0$, dunque, la funzione f ha un punto stazionario. Poiché

$$f''(0) = -\frac{F_{xx}(0,1)}{F_y(0,1)} = \frac{-1}{-1} = 1 > 0\ ,$$

segue che il punto è di minimo locale per la f, come si può anche evincere dal grafico di seguito riportato.

4) Il dominio D è rappresentato in figura:

Applichiamo la formula

$$\oint_{+\partial D} f\ dy = \int_D f_x\ dx\ dy$$

da cui, prendendo $f(x,y) = xy$ e osservando che, lungo γ_1 e γ_3, y è costante, l'integrale curvilineo si riduce a

$$\oint_{+\partial D} xy\ dy = \int_{\gamma_2} xy\ dy - \int_{\gamma_4} xy\ dy$$

dove si è posto il segno $-$ davanti al secondo integrale, in quanto γ_4 viene percorsa in senso contrario a quello di crescita del parametro t. Si ha

$$\oint_{+\partial D} xy\ dy = \int_0^1 y\ dy - \int_0^{\pi/2} t\cos^2 t \sin t\ dt\ .$$

Il secondo integrale si risolve per parti, osservando che $-\cos^2 t \sin t = \left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)'$, da cui

$$\oint_{+\partial D} xy\ dy = \frac{1}{2} + \left[\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right) t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\ dt\right] =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left[\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 t\right)\cos t\ dt\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{18}\ .$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA - a.a. 2003/2004
Svolgimento esercizi della prova scritta di CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE 3 (29 marzo 2004)
COMPITO B

1) Il dominio D è rappresentato in figura:

Applichiamo la formula

$$\oint_{+\partial D} f\ dy = \int_D f_x\ dx\ dy$$

da cui, prendendo $f(x,y) = xy$ e osservando che, lungo γ_1, y è costante, l'integrale curvilineo si riduce a

$$\oint_{+\partial D} xy\ dy = -\int_{\gamma_2} xy\ dy$$

dove si è posto il segno $-$ davanti al secondo integrale, in quanto γ_2 viene percorsa in senso contrario a quello di crescita del parametro t. Si ha

$$\oint_{+\partial D} xy\ dy = -\int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)\sin t\ dt\ \ = = \ -\int_0^{2\pi} [t\sin t - t\cos t\sin t - \sin^2 t + \sin^2 t\cos t]\ dt.$$

Il secondo integrale si risolve per parti, osservando che $\cos t\sin t = \left(\dfrac{\sin^2 t}{2}\right)'$, da cui

$$\oint_{+\partial D} xy\ dy = -\left[-t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\ dt - t\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{2}\ dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt + \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} \right] =$$

$$\left[2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt\right] \ = \ 2\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\ dt \ = \ \frac{5}{2}\pi\ .$$

2) La superficie è il grafico di una funzione, definita in tutto il semipiano superiore delle y positive, di classe C^1. Inoltre $\dfrac{dz}{dx} = -1$; $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{3}{2}y^{1/2}$. Pertanto

$$W(x,y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ = \ \sqrt{2 + \frac{9}{4}y}\ .$$

Il dominio di integrazione può essere rappresentato in forma normale rispetto all'asse delle x:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 2-x\}\ ,$$

da cui segue

$$Area(S) = \int_0^1 dx \int_0^{2-x} \sqrt{2+\frac{9}{4}y}\ dy \ = \ \int_0^1 \left[\frac{8}{27}\left(2+\frac{9}{4}y\right)^{3/2}\right]_0^{2-x} dx \ =$$

$$= \frac{8}{27}\int_0^1 \left[\left(\frac{13}{2} - \frac{9}{4}x\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right] dx \ = \ \frac{8}{27}\left[-2^{3/2}x - \frac{8}{45}\left(\frac{13}{2}-\frac{9}{4}x\right)^{5/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{27}\left\{\frac{8}{45}\left[\left(\frac{13}{2}\right)^{5/2} - \left(\frac{17}{4}\right)^{5/2}\right] - 2^{3/2}\right\}\ .$$

3) Il dominio T è normale rispetto al piano (x, y) e si può scrivere nella forma

$$T = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \mid 0 \le x \le 1 \; ; \; 0 \le y \le 1 - x \; ; \; x + y - 1 \le z \le 0\} \; .$$

Trattandosi di un tetraedro, il suo volume è immediatamente fornito da un terzo dell'area di base per la lunghezza dell'altezza:

$$VolT = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \; .$$

Inoltre

$$\iiint_T \frac{1}{(2 + x + y - z)^2} \, dx \, dy \, dz \; = \; \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{1}{(2 + x + y - z)} \right]_{x+y-1}^0 \; =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{1}{2 + x + y} - \frac{1}{3} \right] \; = \; \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(x - 1) + \log 3 - \log(2 + x) \right] dx \; .$$

Ricordando che, integrando per parti, si ha

$$\int \log(t) \, dt = t \log(t) - t + C \; ,$$

possiamo scrivere

$$\iiint_T \frac{1}{(2 + x + y - z)^2} \, dx \, dy \, dz \; = \; \left\{ \frac{(x - 1)^2}{6} + x \log 3 - [(x + 2) \log(x + 2) - (x + 2)] \right\}_0^1 \; =$$
$$= \; \frac{5}{6} + 2 \log \left(\frac{2}{3} \right) \; .$$

4) Detta $F(x, y) = \log(xy) + (1 + x)y$, i punti singolari della curva $F(x, y) = 0$ sono caratterizzati dalla condizione $\nabla F = (F_x, F_y) = (0, 0)$.

In questo caso si ha

$$F_x(x, y) = \frac{1}{x} + y = \frac{1 + xy}{x} \quad ; \quad F_y(x, y) = \frac{1}{y} + (1 + x) = \frac{1 + xy + y}{y} \; .$$

Essendo la funzione F definita per ogni punto (x, y) tale che $xy > 0$, la derivata F_x non si annulla mai, nell'insieme di definizione della F. Quindi non esistono punti singolari per la curva.

Consideriamo il punto $P_0 = (-1, -1)$: $F(-1, -1) = 0$; $F_x(-1, -1) = -2 \neq 0$; $F_y(-1, -1) = -1 \neq 0$. Dunque, secondo il Teorema di Dini, esiste un intorno del punto $P_0 = (-1, -1)$ in cui la curva è esplicitabile rispetto a entrambe le variabili, ad esempio rispetto alla variabile x; in tal caso F è localmente grafico di una funzione regolare $y = f(x)$. Per tale funzione, sempre in base al Teorema di Dini, si ha

$$f'(-1) = -\frac{F_x(-1, -1)}{F_y(0 - 1, -1)} = -2 < 0 \; .$$

In $x_0 = -1$, dunque, la funzione f è decrescente, come si può anche evincere dal grafico di seguito riportato.

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA - a.a. 2003/2004

Svolgimento esercizi della prova scritta di CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE 3 (29 marzo 2004)

COMPITO C

1) Detta $F(x,y) = e^{x+y} + x + y - 1$, i punti singolari della curva $F(x,y) = 0$ sono caratterizzati dalla condizione $\nabla F = (F_x, F_y) = (0,0)$.

In questo caso si ha

$$F_x(x,y) = e^{x+y} + 1 \quad ; \quad F_y(x,y) = e^{x+y} + 1 \ .$$

Entrambe le derivate parziali sono sempre positive. Quindi non esistono punti singolari per la curva.

Consideriamo il punto $P_0 = (1,-1)$: $F(1,-1) = 0$; $F_x(1,-1) = 2 \neq 0$; $F_y(1,-1) = 2 \neq 0$. Dunque, secondo il Teorema di Dini, esiste un intorno del punto $P_0 = (1,-1)$ in cui la curva è esplicitabile rispetto a entrambe le variabili, ad esempio rispetto alla variabile x; in tal caso F è localmente grafico di una funzione regolare $y = f(x)$. Per tale funzione, sempre in base al Teorema di Dini, si ha

$$f'(1) = -\frac{F_x(1,-1)}{F_y(1,-1)} = -1 \ .$$

In $x_0 = 1$, dunque, la funzione f è decrescente, come si può anche evincere dal grafico di seguito riportato.

2) Il dominio D è rappresentato in figura:

Applichiamo la formula

$$-\oint_{+\partial D} f \ dx = \int_D f_y \ dx \ dy$$

da cui, prendendo $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2}$ e osservando che, lungo γ_2, x è costante, l'integrale curvilineo si riduce a

$$-\oint_{+\partial D} \frac{y^2}{2} \ dx = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{y^2}{2} \ dx \ = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)(\cos t - t\sin t) \ dt \ =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (t\sin^3 t - \sin^2 t\cos t) \ dt \ = \ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [t\sin t - t\cos^2 t\sin t - \sin^2 t\cos t] \ dt.$$

Il secondo integrale si risolve per parti, osservando che $-\cos^2 t \sin t = \left(\dfrac{\cos^3 t}{3}\right)'$, da cui

$$-\oint_{+\partial D} \frac{y^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[-t\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt + t\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{3}\, dt - \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}\sin^2 t\cos t\right) dt - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\sin t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{9}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{2}{9}\ .$$

3) La superficie è il grafico di una funzione, definita in tutto il semipiano destro delle x positive, di classe C^1. Inoltre $\dfrac{dz}{dx} = 3x^{1/2}$; $\dfrac{dz}{dy} = 1$. Pertanto

$$W(x,y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{2+9x}\ .$$

Il dominio di integrazione può essere rappresentato in forma normale rispetto all'asse delle y:

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le y \le 1\ ;\ 0 \le x \le 2-y\}\ ,$$

da cui segue

$$Area(S) = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} \sqrt{2+9x}\, dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{27}(2+9x)^{3/2}\right]_0^{2-y} dy =$$

$$= \frac{2}{27}\int_0^1 \left[(20-9y)^{3/2} - 2^{3/2}\right] dy = \frac{2}{27}\left[-2^{3/2}y - \frac{2}{45}(20-9y)^{5/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{27}\left\{\frac{2}{45}\left[(20)^{5/2} - (11)^{5/2}\right] - 2^{3/2}\right\}\ .$$

4) Il dominio T è normale rispetto al piano (x,y) e si può scrivere nella forma

$$T = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid 0 \le x \le 1\ ;\ x-1 \le y \le 0\ ;\ 0 \le z \le 1-x+y\}\ .$$

Trattandosi di un tetraedro, il suo volume è immediatamente fornito da un terzo dell'area di base per la lunghezza dell'altezza:

$$VolT = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}\ .$$

Inoltre

$$\iiint_T \frac{1}{(2+x-y+z)^2}\ dx\ dy\ dz \ = \ \int_0^1 \ dx \ \int_{x-1}^0 \ dy \ \left[\frac{-1}{(2+x-y+z)}\right]_0^{1-x+y} \ =$$

$$= \int_0^1 \ dx \ \int_{x-1}^0 \ dy \left[\frac{1}{2+x-y} - \frac{1}{3}\right] \ = \ -\int_0^1 \left[\log 3 - \log(x+2) + \frac{1}{3}(x-1)\right] \ dx \ .$$

Ricordando che, integrando per parti, si ha

$$\int \log(t)\ dt = t\log(t) - t + C \ ,$$

possiamo scrivere

$$\iiint_T \frac{1}{(2+x-y+z)^2}\ dx\ dy\ dz \ = \ \left[\frac{(x-1)^2}{6} + x\log 3 - (x+2)\log(x+2) + (x+2)\right]_0^1 \ =$$

$$= \ \frac{5}{6} + 2\log\left(\frac{2}{3}\right) \ .$$

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA - a.a. 2003/2004
Svolgimento esercizi della prova scritta di CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE 3 (29 marzo 2004)
COMPITO D

1) Il dominio D è rappresentato in figura:

Applichiamo la formula

$$-\oint_{+\partial D} f\ dx = \int_D f_y\ dx\ dy$$

da cui, prendendo $f(x,y) = \frac{y^2}{2}$ e osservando che, lungo γ_2 e γ_4, x è costante, l'integrale curvilineo si riduce a

$$-\oint_{+\partial D} \frac{y^2}{2}\ dx = -\int_{\gamma_1} \frac{y^2}{2}\ dx + \int_{\gamma_3} \frac{y^2}{2}\ dx$$

avendo cambiato il segno al secondo integrale, in quanto γ_3 viene percorsa in senso contrario a quello di crescita del parametro x. Si ha

$$-\oint_{+\partial D} \frac{y^2}{2}\ dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\ dt + \int_0^{2\pi} 2\ dx \ = \ 4\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right]\ dt \ =$$

$$= \ 4\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t - 4\cos t + \sin^2 t \cos t\right]\ dt \ = \ 4\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - 4\sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} \ =$$

$$= \ \frac{3}{2}\pi\ .$$

2) La superficie è il grafico di una funzione, definita in tutto il semipiano superiore delle y positive, di classe C^1. Inoltre $\frac{dz}{dx} = 1$; $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}y^{1/2}$. Pertanto

$$W(x,y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ = \ \sqrt{2 + \frac{1}{4}y}\ .$$

Il dominio di integrazione può essere rappresentato in forma normale rispetto all'asse delle x:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le x+1\}\ ,$$

da cui segue

$$Area(S) = \int_0^1 dx \int_0^{1+x} \sqrt{2 + \frac{1}{4}y}\ dy \ = \ \int_0^1 \left[\frac{8}{3}\left(2 + \frac{1}{4}y\right)^{3/2}\right]_0^{1+x} dx \ =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 \left[\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}x\right)^{3/2} - 2^{3/2}\right] dx \ = \ \frac{8}{3}\left[\frac{8}{5}\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}x\right)^{5/2} - 2^{3/2}x\right]_0^1 \ =$$

$$= \frac{8}{3}\left\{\frac{8}{5}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{5/2} - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right] - 2^{3/2}\right\}\ .$$

3) Il dominio T è normale rispetto al piano (x,y) e si può scrivere nella forma

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 0 \; ; \; 0 \le y \le x+1 \; ; \; 0 \le z \le 1+x-y\} \; .$$

Trattandosi di un tetraedro, il suo volume è immediatamente fornito da un terzo dell'area di base per la lunghezza dell'altezza:

$$VolT = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \; .$$

Inoltre

$$\iiint_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2} \, dx \, dy \, dz \; = \; \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} dy \; \left[\frac{-1}{(2-x+y+z)} \right]_0^{x-y+1} =$$

$$= \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} dy \left[\frac{1}{2-x+y} - \frac{1}{3} \right] \; = \; \int_{-1}^{0} \left[\log 3 - \log(2-x) - \frac{1}{3}(x+1) \right] \, dx \; .$$

Ricordando che, integrando per parti, si ha

$$\int \log(-t) \; dt = t \log(-t) - t + C \; ,$$

possiamo scrivere

$$\iiint_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2} \, dx \, dy \, dz \; = \; \left[x \log 3 - \frac{(x+1)^2}{6} - (x-2)\log(2-x) + (x-2) \right]_{-1}^{0} =$$

$$= \; \frac{5}{6} + 2 \log\left(\frac{2}{3}\right) \; .$$

4) Detta $F(x,y) = \log(x+y) - x + y$, i punti singolari della curva $F(x,y) = 0$ sono caratterizzati dalla condizione $\nabla F = (F_x, F_y) = (0,0)$.

In questo caso si ha

$$F_x(x,y) = \frac{1}{x+y} - 1 \quad ; \quad F_y(x,y) = \frac{1}{x+y} + 1 \; .$$

Essendo F definita per valori (x,y) tali che $x+y > 0$, la seconda derivata è sempre strettamente positiva. Quindi non esistono punti singolari per la curva.

Consideriamo il punto $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$; $F_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$; $F_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$. Dunque, secondo il Teorema di Dini, esiste un intorno del punto $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ in cui la curva è esplicitabile rispetto alla variabile x, cioè è localmente grafico di una funzione regolare $y = f(x)$. Per tale funzione, sempre in base al Teorema di Dini, si ha

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{F_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{F_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = 0 \ .$$

In $x_0 = \frac{1}{2}$, dunque, la funzione f ha un punto stazionario. Poiché

$$f''\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{F_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{F_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} > 0 \ ,$$

segue che il punto è di minimo locale per la f, come si può anche evincere dal grafico di seguito riportato.